Praktikum
Lineare Algebra 1
WS 2011/2012

Blatt 7 (Lösungen)
22. November 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1)**:

ad (a):
Wählt man in G resp. E resp. F den Punkt $(1,0,0)$ resp. $(0,0,0)$ resp. $(1,0,0)$ als *Aufpunkt*, dann erhält man

$$G = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$E = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$F = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) + \mathbb{R}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

und somit die folgenden *Parameterdarstellungen* von G, E und F:

$$G = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\+1\\+1\end{pmatrix}$$

$$E = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}-1\\+1\\+1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.$$

ad (b):
Gesucht sind Darstellungen der Ebenen E und F in der Form
- $E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = c\}$
- $F = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = d\}$

mit $(a_1, a_2, a_3, c) \in \mathbb{R}^4$ und $(b_1, b_2, b_3, d) \in \mathbb{R}^4$.

Die Ebenen E und F sind definiert durch
- $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1) \in E$
- $(1,0,0),(0,1,1),(1,1,0) \in F$

Also muß (a_1,a_2,a_3,c) das homogene (!) lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 0\,a_1 + 0\,a_2 + 0\,a_3 &= c \\ 1\,a_1 + 0\,a_2 + 0\,a_3 &= c \\ 0\,a_1 + 1\,a_2 + 1\,a_3 &= c \end{aligned}$$

und (b_1,b_2,b_3,d) das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1\,b_1 + 0\,b_2 + 0\,b_3 &= d \\ 0\,b_1 + 1\,b_2 + 1\,b_3 &= d \\ 1\,b_1 + 1\,b_2 + 0\,b_3 &= d \end{aligned}$$

erfüllen.
Der Lösungsraum des ersten resp. zweiten Systems ist

$$\mathbb{R}\begin{pmatrix} 0 \\ +1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also können wir $(a_1,a_2,a_3,c) = (0,+1,-1,0)$ und $(b_1,b_2,b_3,d) = (1,0,1,1)$ wählen und erhalten die folgenden *impliziten Darstellungen* von E und F:

$$\begin{aligned} E &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0\} \\ F &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich beispielsweise:
- E geht durch die Punkte $(0,0,0),(1,0,0),(0,1,1),(1,1,1)$ des Einheitswürfels.
- F geht durch die Punkte $(1,0,0),(1,1,0),(0,0,1),(0,1,1)$ des Einheitswürfels.

ad (c):
Wir zeigen zunächst, daß tatsächlich $G = E \cap F$ ist.
Die in (a) bestimmten Parameterdarstellungen von E, F, G können in der Form

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha,\beta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\gamma \\ \gamma+\delta \\ \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; \gamma,\delta \in \mathbb{R} \right\}$$

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1-\varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \;\middle|\; \varepsilon \in \mathbb{R} \right\}$$

angeschrieben werden, woraus sich die Inklusionen $G \subseteq E \cap F$ und $G \supseteq E \cap F$ unmittelbar ableiten lassen:
Ist $x \in G$, dann gibt es eine eindeutig bestimmte Zahl $\varepsilon \in \mathbb{R}$ mit $x = (1-\varepsilon,\varepsilon,\varepsilon)^{\mathrm{T}}$.

Setzt man $\alpha = 1-\varepsilon$, $\beta = \varepsilon$, $\gamma = \varepsilon$, $\delta = 0$, dann ist $x = (\alpha, \beta, \beta)^{\mathrm{T}} = (1-\gamma, \gamma+\delta, \gamma)^{\mathrm{T}}$. Also ist $x \in E \cap F$.

Ist umgekehrt $x \in E \cap F$, dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $x = (\alpha, \beta, \beta)^{\mathrm{T}} = (1-\gamma, \gamma+\delta, \gamma)^{\mathrm{T}}$. Aus $(\alpha, \beta, \beta)^{\mathrm{T}} = (1-\gamma, \gamma+\delta, \gamma)^{\mathrm{T}}$ folgt $\beta = \gamma+\delta$ und $\beta = \gamma$, also $\gamma+\delta = \gamma$ und somit $\delta = 0$. Also ist $x = (1-\gamma, \gamma, \gamma)^{\mathrm{T}}$ und folglich $x \in G$.

Aus der Beziehung $G = E \cap F$ und aus den in (b) bestimmten impliziten Darstellungen von E und F folgt, daß für jeden Punkt $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ die Aussagen

– $x \in G$
– $x \in E$ und $x \in F$
– $x_1 + x_3 = 1$ und $x_2 - x_3 = 0$

aequivalent sind.

Die Punkte $x \in G$ sind also genau die Lösungen des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{aligned} x_1 + \quad + x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 0\,, \end{aligned}$$

das man in Matrizenform so darstellen kann:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dieses Gleichungssystem ist *eine implizite Darstellung* der Geraden G.

Bemerkung:

Es seien

– $M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = c\}$
– $N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx = d\}$

implizite Darstellungen der affinen Unterräume M und N von $\mathbb{R}^n$ mit den Matrizen

– $A \in \mathbb{R}^{p\times n}$
– $B \in \mathbb{R}^{q\times n}$
– $c \in \mathbb{R}^{p\times 1}$
– $d \in \mathbb{R}^{q\times 1}$.

Ist dann

– $C \in \mathbb{R}^{(p+q)\times n}$

die Matrix aus den p Zeilen von A und den q Zeilen von B sowie

– $e \in \mathbb{R}^{(p+q)\times 1}$

die Spalte aus den p Elementen von c und den q Elementen von d, dann ist

– $M \cap N = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Cx = e\}$

eine implizite Darstellung des Durchschnitts $M \cap N$ von M und N.

Dieses allgemeine Prinzip haben wir soeben in dem Spezialfall $n = 3$ sowie $M = E$, $N = F$ und $M \cap N = G$ verwendet.

(2) **Lösung von Aufgabe (2)**:

zum Hinweis:

$$\begin{aligned}
\langle \psi, A^2 \psi \rangle &= \sum_i \psi_i \left(A^2 \psi\right)_i \\
&= \sum_i \psi_i \left(\sum_{jk} A_{ij} A_{jk} \psi_k \right) \\
&= \sum_{ijk} A_{ij} A_{jk} \psi_i \psi_k \\
&= \sum_j \left(\sum_i A_{ij} \psi_i \right) \left(\sum_k A_{jk} \psi_k \right) \\
&= \sum_j \left(\sum_i A_{ji} \psi_i \right) \left(\sum_k A_{jk} \psi_k \right) \\
&= \sum_j (A\psi)_j \, (A\psi)_j \\
&= \langle A\psi, A\psi \rangle
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
\Delta A \Delta B &= \sqrt{\langle A\psi, A\psi \rangle \langle B\psi, B\psi \rangle} \\
&= \|A\psi\| \|B\psi\| \\
&\geq |\langle A\psi, B\psi \rangle|
\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die Cauchy-Schwarz Ungleichung verwendet haben.