Name:	Gruppe:

KLAUSUR 24.01.2012

PRAKTIKUM LINEARE ALGEBRA 1 WS 2011/2012

Alle Lösungen müssen lesbar geschrieben und ausreichend begründet sein, die Ergebnisse sind soweit wie möglich zu vereinfachen. Als Hilfsmittel ist ein nicht programmierbarer Taschenrechner erlaubt. Der Notenschlüssel lautet wie folgt (ohne Mitarbeit): Nicht genügend (0–8 Punkte), Genügend (9–10 Punkte), Befriedigend (11–12 Punkte), Gut (13–14 Punkte), Sehr gut (15-17 Punkte).

(1) **[4 Punkte]** Gegeben sei folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -(2x+4y+z) &= 1 \\ 2x+5z+1 &= y \\ 3x+2y &= 1 \end{aligned}$$

- Schreibe die Gleichungen in die form Ax=b.
- Bestimme $L(A,b)$.
- Welche Dimension hat der Lösungsraum. Handelt es sich beim Lösungsraum um einen Vektorraum? Wieviele Lösungen gibt es?

(2) **[4 Punkte]** Gegeben sei folgende Matrix

$$A = \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

- Bestimme alle Eigenwerte und den Eigenraum aller dieser Eigenwerte.
- Berechne A^n.
- Berechne $\det A$ und $\det(A^n)$.

Hinweis: Für $ad - bc \neq 0$ gilt folgende Relation

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

(3) **[2 Punkte]** Bestimme für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Matrix A invertierbar ist und berechne A^{-1} für

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & a \end{bmatrix}.$$

(4) **[2 Punkte]** Bestimme eine Parameter- und eine implizite Darstellung der Ebene E die durch die Bedingung

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \in E$$

gegeben ist.

(5) **[3 Punkte]** Zeige (durch Nachrechnen) folgende Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} + \frac{1}{n(n+1)}$$

und bestimme den Wert der Summe

$$\sum_{i=1}^{n} x^{2(i+1)}.$$

(6) **[2 Punkte]** Wir nehmen an, dass $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix ist. Berechne für $b \in \mathbb{R}^n$

$$\langle b, Ab \rangle$$

mit dem Standardskalarprodukt und vereinfache den Ausdruck soweit wie möglich.