Praktikum
Analysis 1
WS 2011/2012

Blatt 12

19. Jänner 2012

(1) Das **Taylorpolynom vom Grad** n einer n mal differenzierbaren Funktion $f(x)$ um den Punkt $x = a$ wird wie folgt berechnet:

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Man schreibt dann oft

$$f(a+h) = p_n(h) + \mathcal{O}\left(h^{n+1}\right)$$

um anzudeuten, dass für kleine h das Polynom p_n eine Näherung an die Funktion f ist.

Überprüfe diese Aussage durch Anfertigung eines Graphen für

- $f(x) = e^x$ um $x = 0$, für $n = 2$.
- $f(x) = \sin x$ um $x = 0$, für $n = 3$.
- $f(x) = \log x$ um $x = 1$, für $n = 2$.

(2) Berechne das Taylorpolynom vom Grad 3 für folgende Funktionen

- $\log \cos x$ um $x = 0$.
- $f(x) = \frac{\sin x^2}{x-1}$ um $x = 0$.
- $f(z) = \frac{1}{z}$ um $z = 1$. Vergleiche das Ergebnis mit der geometrischen Reihe.

(3) Die 1 in 60 rule of aviation besagt, dass ein Pilot der sich 60 km geradlinig bewegt, pro Grad an Abweichung vom Kurs, das Ziel um 1 km verfehlt. Berechne den Wert (ohne Taschenrechner) indem alle auftretenden Funktionen durch ein Taylorpolynom vom Grad 2 genähert werden.

Bemerkung: Dabei handelt es sich um die Kleinwinkelnäherung (small angle approximation), welche z.B.: auch in der Optik oder der Astronomie nützlich ist.

(4) Berechne eine Näherung an eine Lösung der Gleichung $\cos x = x$, mithilfe eines Taylorpolynoms vom Grad 2. Überlege ob es möglich ist, die exakte Lösung zu berechnen.