Praktikum
Analysis 1
WS 2011/2012

Blatt 3 (Lösungen)
20. Oktober 2011

(1) **Lösung von Aufgabe (1):**

ad (a):

Die Aussage $2n+1<2^n$ wird durch Induktion über n für alle $n\geq 3$ gezeigt.

Induktionsanfang:
Die Aussage gilt für $n=3$, denn es ist $2\cdot 3+1=7<8=2^3$.

Induktionsschluß:
Es sei $n\geq 3$ eine beliebige Zahl, für welche die Aussage gilt, das heißt es sei $2n+1<2^n$. Dann ist auch $n{+}1$ eine Zahl, für welche die Aussage gilt.
Aus der Annahme über n folgt nämlich $2(n{+}1)+1=(2n+1)+2<2^n+2$.
Wegen $n\geq 3$ ist $2=2^1<2^3\leq 2^n$, also $2<2^n$ und damit
$2(n{+}1)+1<2^n+2<2^n+2^n=2^n\cdot 2=2^{n+1}$, also $2(n{+}1)+1<2^{n+1}$.

Damit ist gezeigt:
- Die Aussage $2n+1<2^n$ gilt für $n=3$.
- Ist $n\geq 3$ und gilt die Aussage $2n+1<2^n$ für n, so gilt sie auch für $n{+}1$.

Also gilt die Aussage $2n+1<2^n$ für *alle* natürlichen Zahlen $n\geq 3$.

Bemerkung:
Für $n=0,1,2$ ist die Aussage *falsch*, denn es ist
$2\cdot 0+1=1\not<1=2^0$
$2\cdot 1+1=3\not<2=2^1$
$2\cdot 2+1=5\not<4=2^2$.

ad (b):

Die Aussage $n^2<2^n$ wird durch Induktion über n für alle $n\geq 5$ gezeigt.

Induktionsanfang:
Die Aussage gilt für $n=5$, denn es ist $5^2=25<32=2^5$.

Induktionsschluß:
Es sei $n\geq 5$ eine beliebige Zahl, für welche die Aussage gilt, das heißt es sei $n^2<2^n$. Dann ist auch $n{+}1$ eine Zahl, für welche die Aussage gilt.
Aus der Annahme über n folgt nämlich $(n{+}1)^2=n^2+2n+1<2^n+2n+1$.
Wegen $n\geq 5$ und wegen (a) ist $2n+1<2^n$ und damit
$(n{+}1)^2<2^n+2n+1<2^n+2^n=2^n\cdot 2=2^{n+1}$.

Damit ist gezeigt:
- Die Aussage $n^2<2^n$ gilt für $n=5$.

- Ist $n \geq 5$ und gilt die Aussage $n^2 < 2^n$ für n, so gilt sie auch für $n+1$.

Also gilt die Aussage $n^2 < 2^n$ für *alle* natürlichen Zahlen $n \geq 5$.

Bemerkung:
Für $0 \leq n < 5$ ist die Aussage $n^2 < 2^n$ *nicht immer wahr*, denn es ist
$0^2 = 0 < 1 = 2^0$
$1^2 = 1 < 2 = 2^1$
$2^2 = 4 \not< 4 = 2^2$
$3^2 = 9 \not< 8 = 2^3$
$4^2 = 16 \not< 16 = 2^4$.

(2) **Lösung von Aufgabe (2):**

- Da $W \neq \emptyset$ muss es zumindest ein w geben, so dass $w \in W$.
- Da $A \neq B$ muss es zumindest ein $a \in A$ geben, sodass $a \notin B$ oder es muss ein $b \in B$ geben, sodass $b \notin A$.

  1. Fall: Da $a \in A$ aber $a \notin B$ gilt $(a, w) \in A \times W$ und $(a, w) \notin B \times W$. Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $A \times W = B \times W$.

  2. Fall: Funktioniert analog zu Fall 1.

(3) **Lösung von Aufgabe (3):** Zum Überprüfen der Zeichnung verwende z.B.: `http://www.wolframalpha.com/`.

- $D = \mathbb{R}$, $W = [2, \infty)$. Geht gegen ∞ sowohl bei $x \to \infty$ als auch bei $x \to -\infty$.
- $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$. Geht gegen ∞ bei $x \to \infty$ und gegen $-\infty$ bei $x \to -\infty$.
- $D = \mathbb{R} \backslash \{-2\}$, $W = \mathbb{R}$. Geht gegen 0 sowohl bei $x \to \infty$ als auch bei $x \to -\infty$.
- $D = \mathbb{R}$, $W = (0, 1]$. Geht gegen 0 sowohl bei $x \to \infty$ als auch bei $x \to -\infty$.
- $D = \mathbb{R}$, $W = [0, \infty)$. Geht gegen ∞ sowohl bei $x \to \infty$ als auch bei $x \to -\infty$.
- $D = \mathbb{R}$, $W = [0, \infty)$. Geht gegen 0 für $x \to \infty$ und gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$.
- $D = [2, \infty)$, $W = \mathbb{R}$. Geht gegen ∞ für $x \to \infty$ und gegen $-\infty$ für $x \to 2$.
- $D = \mathbb{R}$, $W = [-1, 1]$. Der Sinus ist eine periodische Funktion und hat damit keinen Grenzwert.
- $D = \mathbb{R} \backslash \{x \in \mathbb{R} \colon x = n\frac{\pi}{2},\, n \in \mathbb{Z}\}$. Hat ebenfalls keinen Grenzwert.

(4) **Lösung von Aufgabe (4):**

- Den Nenner faktorisieren wir in $(x + 3)(x - 2)$. Dann führt der Ansatz

$$\frac{2x - 1}{x^2 + x - 6} = \frac{A}{x + 3} + \frac{B}{x - 2},$$

auf die Gleichungen

$$2x - 1 = A(x - 2) + B(x + 3).$$

Setzen wir hier $x = 2$ und $x = -3$ ein erhalten wir $A = \frac{7}{5}$ und $B = \frac{3}{5}$. Achtung: Dies ist nur erlaubt, wenn wir bereits wissen, dass die obere Gleichung eine Lösung besitzt. In diesem Fall ist dies aber klar, da $x + 2$ und $x - 3$ eine Basis von $P_1 := \{p \text{ polynom} \colon \deg p \leq 1\}$ ist.

- Die Faktorisierung ergibt $(x-1)^2$. Daher müssen wir den Ansatz

$$\frac{2x+1}{(x-1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2}$$

wählen. Das gleiche Verfahren wie zuvor führt auf $A = 2$, $B = 3$.
- Da der Grad des Zählers gleich ist der des Nenners führen wir eine Polynomdivision durch und erhalten

$$1 + \frac{2}{(x-1)(x+1)}.$$

Daraus folgt dann mittels Partialbruchzerlegung

$$\frac{x^2+1}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}.$$